

LEÇONS  
SUR L'INTÉGRATION

ET LA

RECHERCHE DES FONCTIONS PRIMITIVES

PROFESSÉES AU COLLÈGE DE FRANCE

PAR

**Henri LEBESGUE**

Membre de l'Institut,  
Professeur au Collège de France,  
Professeur honoraire à la Faculté des Sciences de Paris.

CHELSEA PUBLISHING COMPANY  
BRONX, NEW YORK

Tout point  $P_0$  est alors intérieur à un domaine  $D(P_0)$  tel que le rapport  $\frac{\varphi}{\psi}$  diffère de  $f(P)$  de moins de  $\epsilon$  pour le domaine  $D(P_0)$  et pour tous les domaines intérieurs, assujettis aux restrictions qui ont pu être imposées dans la définition de la dérivée. A l'aide d'un nombre fini de ces domaines  $D(P_0)$  on couvrira, d'après le théorème de M. Borel (p. 112), tout le domaine  $D$  que l'on considère. En restreignant ces domaines  $D(P_0)$  on pourra les supposer sans points intérieurs communs. Alors on aura partagé  $D$  en domaines partiels  $D_1, D_2, \dots, D_n$  et pris dans chacun d'eux ou au voisinage de chacun d'eux un point particulier  $P_i$ , de manière que l'on ait

$$\varphi(D_i) = \psi(D_i) [f(P_i) + \theta_i \epsilon] \quad (-1 \leq \theta_i \leq +1).$$

Si  $f(P)$  est continue, on modifiera très peu ceci en supposant  $P_i$  pris dans  $D_i$ .

De là résulte

$$\varphi(D) = \Sigma \varphi(D_i) = \Sigma \psi(D_i) f(P_i) + \theta \epsilon \Sigma \psi(D_i).$$

Si donc, quel que soit le morcellement de  $D$  en les  $D_i$  et quel que soit le choix des  $P_i$ , la première somme tend vers une limite déterminée pour des  $D_i$  de plus en plus petits, et la seconde reste bornée — ce dernier fait exprime que  $\psi$  est à variation bornée — on sait calculer  $\varphi(D)$ .

La précision de ces aperçus conduit tout naturellement à l'intégrale de Stieltjès; il suffit de supposer qu'il s'agit de domaines à une dimension, d'intervalles, que  $f(P)$  est  $f(x)$ , que  $\psi(D)$  est la fonction d'intervalle que nous avons attachée à une fonction  $\alpha(x)$  à variation bornée, pour retrouver la définition posée par Stieltjès, pour  $\int f(x) d[\alpha(x)]$ .

Mais il est clair que de ces aperçus dériveraient aussi des généralisations de cette intégrale aux fonctions de plusieurs variables. Nous n'insisterons pas puisque, dans ce Livre, nous nous bornons toujours à l'intégration des fonctions d'une variable.

---

des nombres attachés à des domaines et tels que les grandeurs attachées à des domaines provenant de la subdivision d'un autre domaine aient pour somme la grandeur attachée à ce dernier domaine.

Ces intégrales se réduiraient aux intégrales ordinaires si la fonction  $\psi(D)$  se réduisait à la mesure, au sens ordinaire, du domaine  $D$ ; l'extension de la notion de mesure étudiée par M. de la Vallée Poussin, la forme donnée par M. Radon à la définition de l'intégrale se relie donc étroitement aux considérations physiques qui viennent d'être développées.

La définition de M. Radon s'impose particulièrement si, au lieu d'examiner avec Cauchy une généralisation du problème des fonctions primitives, on étudie une généralisation du problème des quadratures. Supposons qu'on sache que pour tout domaine ou ensemble  $E$ , le produit  $\psi(E)\lambda$  — le nombre  $\lambda$  étant intermédiaire entre les limites inférieure  $l$  et supérieure  $L$  des valeurs prises sur  $E$  par une fonction  $f(P)$  — est une valeur approchée de  $\varphi(E)$  et d'autant plus approchée que  $L - l$  est plus petit. Nous serons tout naturellement conduits, pour calculer  $\varphi(D)$ , à examiner la somme  $\Sigma i \epsilon \psi(E_i)$ , où  $E_i$  est formé des points de  $D$  en lesquels on a  $i \epsilon \leq f(P) < (i+1)\epsilon$ . Or ceci est la définition de M. Radon.

Remarquons que, dans l'Analyse classique, on considère à diverses occasions des sommes  $\Sigma \psi(D_i) f(P_i)$ . Par exemple, lorsque l'on calcule une intégrale curviligne  $\int_C f(x, y, z) dx$  on cherche la limite de

$$\Sigma [x(t_{i+1}) - x(t_i)] f[x(t_i), y(t_i), z(t_i)];$$

et l'on a alors affaire à une fonction  $\psi(D)$  égale à la mesure du segment projection, sur  $Ox$ , de l'arc  $D$ .

Ordinairement de telles intégrales se considèrent groupées

$$\int P dx + Q dy + R dz.$$

Si nous rapprochons ceci de la formule classique qui donne l'arc d'une courbe dans les cas simples

$$\int \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

formule que l'on doit traiter comme une intégrale curviligne, en y substituant  $x, y, z$  en fonction d'un même paramètre  $t$ ; on sera conduit à examiner des intégrations par rapport à plusieurs fonctions d'ensembles, ou si l'on veut par rapport à plusieurs gran-

à un domaine à quatre dimensions de l'espace  $x, y, z, t$ ; celui qui serait obtenu en faisant subir au corps  $C$ , tracé dans  $t = t_0$ , une translation  $\delta t$  parallèle à l'axe des  $t$ .

Nous admettrons donc que les grandeurs dont nous parlons sont des fonctions de domaine et nous remplacerons la notion de grandeurs coexistantes par celle, plus précise, de fonctions d'un même domaine ou, par une abstraction de mathématicien, par celle de fonctions d'un même ensemble.

On rencontre aussi en physique des fonctions de points ou si l'on veut d'un certain nombre de variables. Les unes sont encore des fonctions de domaine, mais attachées à des domaines spéciaux ne dépendant plus que d'un nombre fini de paramètres : la masse  $m$  de la quantité d'eau comprise dans un récipient jusqu'à la hauteur  $h$  est une fonction de  $h$ , mais parce que  $m$  et  $h$  sont des fonctions d'un même domaine. Les autres sont vraiment attachés à des points; ces nombres servent en général à étalonner des états, des qualités, à distinguer par exemple des mouvements plus ou moins rapides (vitesse), des matières plus ou moins denses (densité).

Si l'on considère la définition précise de ces nombres, on constate qu'on les obtient comme valeur limite du quotient de deux fonctions d'un même domaine :

$$\text{Vitesse} = \lim. \text{Vitesse moyenne} = \lim \frac{\text{longueur d'arc de trajectoire}}{\text{temps de parcours de cet arc}},$$

$$\text{Densité} = \lim. \text{Densité moyenne} = \lim \frac{\text{masse d'un corps}}{\text{volume de ce corps}}.$$

Comme notre but n'est pas d'étudier les nombres de la physique, nous n'avons pas à rechercher si tous ces nombres rentrent bien dans l'une ou l'autre des deux catégories indiquées et si la distinction entre ces deux catégories de nombres est absolue; il nous suffira d'avoir remarqué l'importance, en physique, des fonctions de domaine et de cette sorte de dérivation d'une fonction de domaine par rapport à une autre qui fournit les fonctions de points.

Que les fonctions de domaine s'introduisent en physique et y apparaissent même comme plus directement adaptées aux besoins du physicien que les fonctions de points ne doit pas nous étonner. Un point n'est que la conception limite de corps de plus en plus petits, une fonction de point ne peut s'introduire en physique que

comme limite d'une fonction de corps, d'une fonction de domaine. Si pourtant, on parle peu de ces fonctions, c'est que les mathématiciens n'ont pas encore créé l'Algèbre et l'Analyse des fonctions de domaine. On possède par contre des notations remarquablement maniables pour les fonctions de points; aussi, par des artifices divers — mais qui se réduisent toujours au fond à ne raisonner que sur des domaines assez spéciaux pour qu'ils ne dépendent plus que d'un nombre fini de variables —, remplace-t-on toujours l'emploi des fonctions de domaine par celui des fonctions de point.

L'opération de dérivation que nous avons rencontrée est celle qu'étudie Cauchy. Elle se définit ainsi :  $\varphi(D)$  et  $\psi(D)$  étant deux fonctions de domaines, pour avoir la dérivée en un point  $P$  de  $\varphi$  par rapport à  $\psi$ , on prend la limite du rapport  $\frac{\varphi(D_i)}{\psi(D_i)}$  pour une suite de domaines  $D_i$  de plus en plus petits et se réduisant à la limite au seul point  $P$ .

On pourra définir de même la dérivée d'une fonction d'ensemble par rapport à une autre; on pourra être amené aussi à astreindre la suite des  $D_i$  ou des  $E_i$ , à des restrictions supplémentaires pour que la limite existe, comme nous avons dû le faire (p. 191); laissons ces détails de côté.

Proposons-nous, avec Cauchy, de calculer  $\varphi(D)$  connaissant  $\psi(D)$  et la dérivée  $f(P)$  de  $\varphi(D)$  par rapport à  $\psi(D)$ . Ce problème ne serait pas déterminé, et nous ne saurions guère comment l'étudier, si nous laissons à la notion de fonction de domaine toute la généralité possible. *Nous allons supposer qu'il s'agit de fonctions additives de domaine.* C'est là une restriction importante à la conception de Cauchy : la surface et le volume d'un corps sont deux grandeurs coexistantes, ce sont certes aussi deux fonctions de domaine, mais la seconde seule est additive.

En réalité, pour traiter le problème qui va nous occuper, Cauchy se restreint, comme nous allons le faire, mais sans s'en rendre compte nettement, au cas des fonctions additives de domaines. Cette restriction est d'ailleurs légitimée pratiquement par le fait que ceux des nombres fournis par la physique qui sont ce que nous appelons des mesures de grandeur (1) sont des fonctions additives de domaine.

(1) À mon avis les grandeurs devraient être définies des les *Éléments* comme

constante dans tout  $(\nu_1, \nu_2)$  parce que  $\alpha(x)$  n'a pas de singularité inutile.

La dernière forme que nous avons donnée, (p. 173), à la condition d'absolue continuité se généralise donc littéralement; de là on tirerait facilement les généralisations des autres formes de cette condition.

#### IV. — Signification physique de l'intégrale de Stieltjès.

Nous venons de généraliser l'un des modes de définition analytique de l'intégrale; les autres modes de définition analytique sont susceptibles de généralisations analogues (1). Mais n'y a-t-il pas, pour l'intégrale de Stieltjès, une définition analogue à la définition géométrique de l'intégrale, c'est-à-dire qui apparaisse comme une simple mise au point d'une définition intuitive. Ce mode de définition existe, il a certainement guidé les premières idées de Stieltjès, mais Stieltjès n'y insiste pas; son exposé analytique donne toute satisfaction du point de vue logique de sorte que la signification intuitive de l'intégrale de Stieltjès a été un moment oubliée.

Stieltjès dit cependant : supposons qu'il y ait, répandue sur  $Ox$ , de la matière pesante. Soit  $u(x)$  la masse située sur  $(0, x)$ ; calculons le moment de la masse totale par rapport à l'origine. Pour cela, partageons l'intervalle considéré à l'aide de valeurs croissantes  $\xi_i$ , nous aurons une valeur approchée du moment sous la forme

$$\sum \xi_i [u(\xi_{i+1}) - u(\xi_i)];$$

d'où, pour la valeur exacte du moment, une intégrale  $\int x d[u(x)]$ .

Mais la signification de l'intégrale de Stieltjès est bien plus nettement donnée par Cauchy qui avait, avant Stieltjès, considéré l'intégration par rapport à une fonction; bien plus amplement que Stieltjès, au point de vue physique, mais sous une forme bien moins précise, au point de vue logique (2).

(1) Il a déjà été dit que la définition de M. W. H. Young fut généralisée la première (p. 263, en note).

(2) Sur le rapport différentiel de deux grandeurs qui varient simultanément (*Ex. d'Analyse*, t. II, p. 188-229; *Œuvres*, 2<sup>e</sup> série, t. XII, p. 214-262). Voir aussi le *Traité de Mécanique analytique* de l'abbé Moigno.

Le point de départ de Cauchy est la notion de *grandeurs coexistantes*, notion plus large que celle de fonction, dont celle-ci n'est qu'un cas particulier.

Des grandeurs sont dites coexistantes lorsqu'elles sont déterminées par les mêmes conditions, géométriques ou physiques. La surface et le volume d'un cylindre sont des grandeurs coexistantes, déterminées en même temps par la donnée du cylindre. Dans une étendue gazeuse, isolons par la pensée la matière contenue dans un certain domaine; le volume du corps ainsi conçu, sa masse, la quantité de chaleur nécessaire pour élever sa température d'un degré à volume constant sont trois grandeurs coexistantes.

Les nombres qui mesurent ces grandeurs ne sont pas nécessairement des fonctions les uns des autres, les exemples précédents le prouvent; ils le sont parfois; le rayon, la hauteur, la surface, le volume d'un cylindre de révolution sont des grandeurs coexistantes et deux quelconques d'entre elles déterminent les deux autres. D'une façon plus générale, si une grandeur est fonction d'autres grandeurs, toutes ces grandeurs sont coexistantes. Nous sommes habitués à raisonner sur variables et fonctions, mais il y a tout aussi bien lieu de raisonner sur des grandeurs coexistantes : entre la surface et le volume d'un cylindre, on peut, par exemple, établir des relations d'inégalité. Pour donner une base solide aux raisonnements sur les grandeurs coexistantes, précisons cette notion ce qui d'ailleurs va en restreindre la portée.

Dans les exemples précédents, les grandeurs coexistantes apparaissent comme attachées à un même corps, le cylindre ou le corps gazeux, ce sont des fonctions d'un même domaine. Les grandeurs de la physique directement mesurables apparaissent d'ailleurs toujours comme des fonctions de domaine; seulement ces domaines ne sont pas toujours à trois dimensions. Il peut s'agir de domaines sur la droite, c'est-à-dire d'intervalles, de domaines plans ou de domaines à plus de trois dimensions; dans ce dernier cas le domaine ne s'impose plus à nos sens, sa conception purement mathématique est quelque peu artificielle. Si, par exemple, nous avons voulu parler de la quantité de chaleur nécessaire pour élever de  $\delta t$  degrés un corps gazeux  $C$  conçu isolé du reste d'une étendue gazeuse et si nous avons voulu faire varier et  $\delta t$  et le corps, il nous aurait fallu considérer la quantité de chaleur comme attachée